Exercice 1 7 points **Thèmes : fonctions, suites**

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On a pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times 2}{\mathrm{e}^x\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)} = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-x} = 1$ et enfin $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{2}{1} = 2$. Réponse **b.**

2. La dérivée seconde f'' est positive sur les intervalles $]-\infty~;~-1[$ et $[2~;~+\infty[$, donc la fonction f est convexe sur ces intervalles. Réponse **c.**

3. On a pour tout naturel n :

$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 0{,}5a_n + 1 - 2 = 0{,}5a_n - 1 = 0{,}5\left(a_n - 2\right) = 0{,}5b_n$.

L'égalité $b_{n+1} = 0{,}5b_n$ montre que la suite (b_n) est une suite géométrique de raison 0,5.

Réponse **d.**

4. • Comme $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$;

• On a $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2-\frac{n}{n+1} = 1$.

On a donc $1+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 2-\dfrac{n}{n+1}$ avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 2-\frac{n}{n+1} = 1$.

D'après le théorème des gendarmes, on peut dire que la suite (u_n) est convergente et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$. Réponse **b.**

5. Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = x^2\ln x$.

Si $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3\left(\ln x - \dfrac{1}{3}\right)$, alors $F'(x) = x^2\left(\ln x - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{3}x^3 \times \dfrac{1}{x} = x^2\ln x - \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x^2 = x^2\ln x = f(x)$. Réponse **a.**

6. $2 + \dfrac{3\mathrm{e}^{-x} - 5}{\mathrm{e}^{-x}+1} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-x} + 2 + 3\mathrm{e}^{-x} - 5}{\mathrm{e}^{-x}+1} = \dfrac{5\mathrm{e}^{-x} - 3}{\mathrm{e}^{-x}+1}$; en multipliant chaque terme par e^x, on obtient : $\dfrac{5 - 3\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$. Réponse **a.**